

Sous-espaces perfectibles

(1)

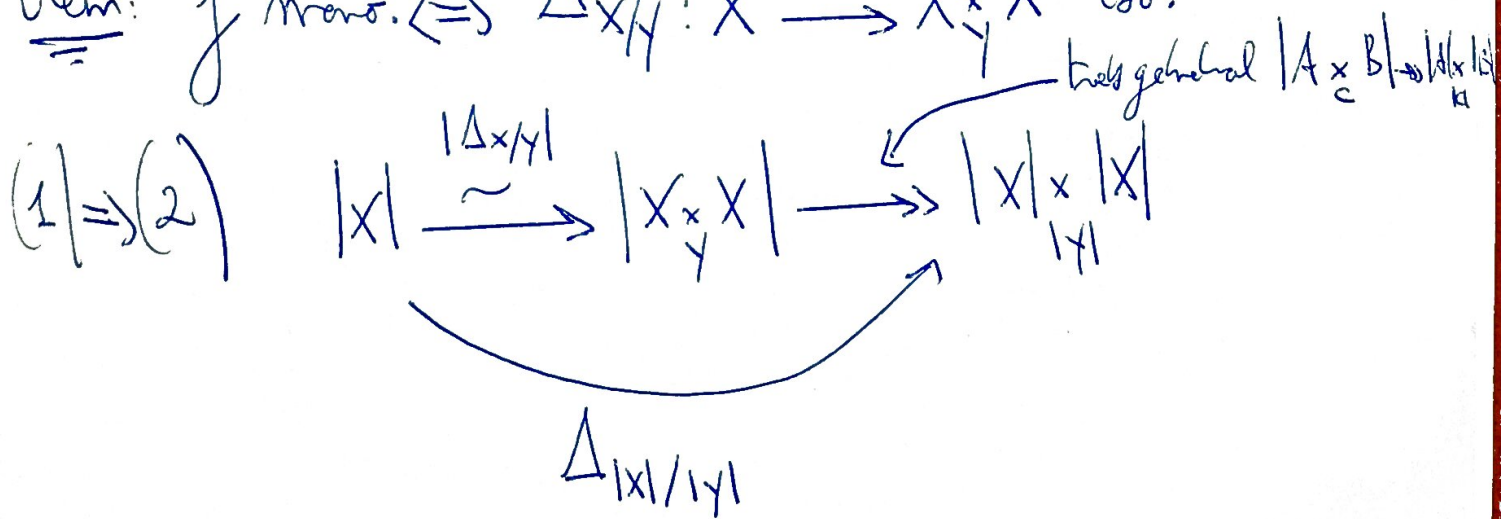
Propriété $f: X \rightarrow Y$ dans Perf. sont :

(1) f monomorphisme de préfaisceaux
i.e. $\forall Z \in \text{Perf} \quad X(Z) \hookrightarrow Y(Z)$

(2) $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ injectif et $\forall k \in X \quad \underbrace{K(f(k)) = K(k)}$

Δ : il faut prendre le Corps résiduel Complet.

Dém. f mono. $\Leftrightarrow \Delta_{X/Y}: X \xrightarrow{\sim} X \times_Y X$ iso.



$\Rightarrow \Delta_{|X|/|Y|}: |X| \xrightarrow{\sim} |X| \times_{|Y|} |X|$ bijectif

$\Rightarrow |X| \hookrightarrow |Y|$ i.e. $|f|$ bijectif.

De plus $\forall x \in X$ si $y = f(x)$

$$K(\Delta_{x/y}(x)) = K(x) \hat{\otimes}_{K(y)} K(x)$$

et donc $K(x) \hat{\otimes}_{K(y)} K(x) \xrightarrow{\sim} K(x)$

$$a \otimes b \longmapsto ab$$

$$\Rightarrow K(x)^{\circ} \hat{\otimes}_{K(y)^{\circ}} K(x)^{\circ} \xrightarrow{\sim} K(x)^{\circ}$$

$\parallel \longleftarrow$ car Corps perfectoïde

$$(K(x) \hat{\otimes}_{K(y)} K(x))^{\circ}$$

$\Rightarrow \forall \omega$ p.u. de $K(y)$

$$K(x)^{\circ}/\omega \otimes_{K(y)^{\circ}/\omega} K(x)^{\circ}/\omega \xrightarrow{\sim} K(x)^{\circ}/\omega$$

$$\Rightarrow K(x)^{\circ}/\omega \xrightarrow{\sim} K(x)^{\circ}/\omega \otimes_{K(y)^{\circ}/\omega} K(x)^{\circ}/\omega$$

$$a \longmapsto a \otimes 1$$

$$\text{Spec}(K(x)^{\circ}/\omega \otimes_{K(y)^{\circ}/\omega} K(x)^{\circ}/\omega) \longrightarrow \text{Spec}(K(x)^{\circ}/\omega)$$

$\downarrow \sim$

\square

$$\text{Spec}(K(x)^{\circ}/\omega) \longrightarrow \text{Spec}(K(y)^{\circ}/\omega)$$

\uparrow recouvrement fpqc

\Rightarrow c.à. d.

Can do fpqc localment.

(2)

$$\Rightarrow \forall \omega \quad K(y)^\circ / \omega = K(x)^\circ / \omega \Rightarrow K(x) = K(y)$$

(2) \Rightarrow (1) résulte de f mono. $\Leftrightarrow \Delta_{X,Y}$ iso. et de la proposition qui suit. □

Prop. $f: X \rightarrow Y$ dans Perf est un iso. ssi $f|_U$ est bijectif et $\forall x \in X \quad K(f(x)) = K(x)$.

Dém. Il suffit de montrer que $\forall V \subset Y$ aff. perf.

$$f^{-1}(V) \rightarrow V \text{ est un iso.}$$

\Rightarrow on peut supposer Y aff. perf.

Soit $\omega \in \mathcal{O}(Y)$ une p. u. - Regarde le morphisme de faisceaux f^*

$$f^{-1} \mathcal{O}_Y^+ / \omega \longrightarrow \mathcal{O}_X^+ / \omega$$

$$\forall x \in X \quad (f^{-1} \mathcal{O}_Y^+ / \omega)_x \longrightarrow (\mathcal{O}_X^+ / \omega)_x$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \\ K(f(x))^+ / \omega \longrightarrow K(x)^+ / \omega \end{array}$$

$$K(f(u))^+ \hookrightarrow K(u)^+$$

↑
 iso. car $K(f(u)) = K(u)$ et f bijectif

⇓
 { sous-anneaux de valuation $K(f(u))^+ \subset V \subset K(f(u))^0$ }

⇓

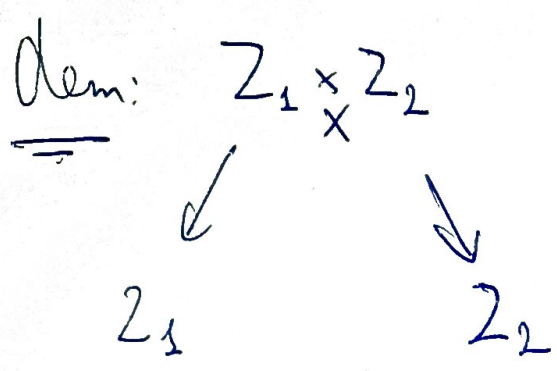
{ " $K(u)^+ \subset V \subset K(u)^0$ }

vrai v_x et $v_\omega \Rightarrow f^{-1} \mathcal{O}_Y^+ = \mathcal{O}_X^+ \Rightarrow f^{-1} \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \quad \square$

$\hookrightarrow \mathcal{O}_X^+ = \varprojlim_N \mathcal{O}_Y^+ / \omega^N$

Coro. $Z_1 \hookrightarrow X$ deux monomorphismes tq. $|Z_1| = |Z_2| \subset |X|$
 $Z_2 \hookrightarrow$

Alex $\exists!$ iso. $Z_1 \hookrightarrow X$
 $\downarrow \cong$
 $Z_2 \hookrightarrow$



$$|Z_1 \times_X Z_2| \rightarrow |Z_1| \times_{|X|} |Z_2| = |Z_1| = |Z_2| \subset |X|$$

it 1, 2 $|Z_1 \times_X Z_2| \rightarrow |Z_1|$

$x \in Z_1$ $\text{Spa}(K(u), K(u)^+) \times_X Z_2 = \text{Spa}(K(u), K(u)^+)$

$\Rightarrow |Z_1 \times_X Z_2| \xrightarrow{\sim} |Z_1| + \widehat{m}$ Caps residuels $\Rightarrow Z_1 \times_X Z_2 \xrightarrow{\sim} Z_1$ \square

Donc { $Z \subset |X|$ pro-cons. généralisant }

↑
par X q.c.

∪

{ sous-espaces perfectoides }

↑ par application $Z \hookrightarrow X$ mono. q.c.

Ex: * $K \subset X$ $\text{Spa}(b(u), b(u)^+) \hookrightarrow X$ s. espace perfectoïde

* $X = \text{Spa}(R, R^+)$

$I =$ idéal de R . $V(I) \subset |X|$ fermé généralisant.

Alors $V(I) = \bigcap_{f \in I} \{ |f| \leq 1 \}$ car $f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0$
 $\Leftrightarrow \forall N \geq 0, |f(x)| \leq |x|^N$
 $\Leftrightarrow \forall N \geq 0, |x^{-N} f(x)| \leq 1$

$\Rightarrow V(I) =$ sous-espace projective $\hookrightarrow X$
 \uparrow pro. étale

\parallel
 $\lim_{\substack{\leftarrow \\ n \in \mathbb{N}}} \{ |f_1| \leq 1, \dots, |f_n| \leq 1 \}$

$X \langle f_1, \dots, f_n \rangle =$ domaine de Weierstrass

Rem: $V(I) = \text{Spa}(A, A^+)$. Alors $R \rightarrow A^+$ est d'image dense

Car $R \rightarrow \mathcal{O}(X \langle f_1, \dots, f_n \rangle)$ est d'image dense \leftarrow

mais pas surjectif en général.

Kedlaya - Liu \Rightarrow surjectif si $pR = 0$.

Prop. X totalement discontinu $\Rightarrow X$ aff. perf.

dem. $X = \bigcup_i U_i$ recouvrement aff. perf.

schéché $\Rightarrow \exists V_i \subset U_i$ ouvert fermé tq. $X = \bigsqcup_i V_i$

↑
off $\Rightarrow V_i$ aff. perf. car U_i l'est \square

Résultat clef

Prop. X totalement discontinu. Alors tout $Z \subset |X|$

pro-Cons généralisant est un sous-espace parfait tq. $Z \subset X$ soit pro-étale

Plus précisément $Z = \bigcap \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(X) \\ Z \subset \{ |g| \leq 1 \} \end{array} \right\}$

dem: $x \in X \setminus Z$

Il faut montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(X) \setminus \mathfrak{q}$. $\begin{cases} |f(x)| > 1 \\ \text{et } |f| \leq 1 \text{ sur } Z. \end{cases}$

~~Il faut~~ $\pi: |X| \rightarrow \pi_0(X)$

$\pi^{-1}(\pi(x)) = \text{Spa}(K, K^+)$ où $K^+ = \mathcal{b}(x^c)^+$, $x^c =$ unique point fermé de $\overline{\{x\}}$.

$Z \cap \pi^{-1}(\pi(x)) =$ pro-cons. généralisant dans $\text{Spa}(K, K^+)$
pro-cons. généralisant

$|\text{Spa}(K, K^+)| =$ Chaîne - Topologie = topologie de l'ordre.

* $Z \cap \text{Spa}(K, K^+)$ généralisant \Rightarrow ouvert dans $\text{Spa}(K, K^+)$
 \uparrow
 $Z \cap \text{Spa}(K, K^+) = \bigcup_{z \in Z \cap \text{Spa}(K, K^+)} \underbrace{\text{Spa}(K, K^+)^{\geq z}}_{\text{ouvert de } \text{Spa}(K, K^+)}$

* $Z \cap \text{Spa}(K, K^+)$ pro-cons. \Rightarrow q.c.

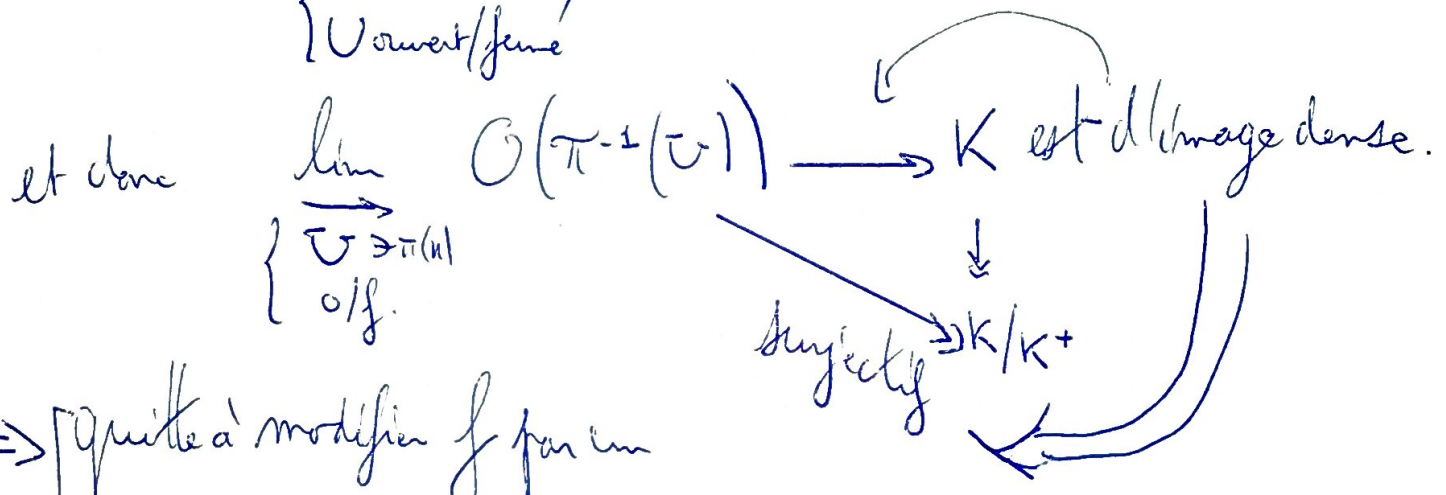
$\Rightarrow \exists z \in Z \cap \text{Spa}(K, K^+) \setminus \mathfrak{q}$. $Z \cap \text{Spa}(K, K^+) = \text{Spa}(K, K^+)^{\geq z} \neq \emptyset$

$K^+ \subset \mathcal{b}(x)^+ \subsetneq \mathcal{b}(z)^+ \subset K^\circ$
 \uparrow car $x \notin Z \cap \text{Spa}(K, K^+)$

Soit $f \in b(\mathbb{Z})^+ \setminus b(\mathbb{N})^+$.

Alors $|f(n)| > 1$ et $|f| \leq 1$ sur $\mathbb{Z} \cap \pi^{-1}(\pi(n))$

$$\pi^{-1}(\pi(n)) = \varprojlim_{\substack{U \ni \pi(n) \\ U \text{ ouvert/fermé}}} \pi^{-1}(U)$$



\Rightarrow quitte à modifier f par un

élément de K^+ on peut supposer que f s'étend en

~~$f \in b(\mathbb{Z})^+$~~ $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ avec $f = \tilde{f}|_{\pi^{-1}(\pi(n))}$

ne change pas la propriété $|f(n)| > 1$ et $|f| \leq 1$ sur $\mathbb{Z} \cap \pi^{-1}(\pi(n))$

Car $K^+ \subset b(\mathbb{N})^+ \not\subset b(\mathbb{Z})^+$

\nexists un a tel $\{| \tilde{f} | > 1 \} \cap \mathbb{Z} \cap \pi^{-1}(\pi(n)) = \emptyset$

\rightarrow dans $\pi^{-1}(U)$

i.e. $\bigcap_{\substack{V \subset U \\ \text{voisin/fermé} \\ n \in V}} \{| \tilde{f} | > 1 \} \cap \mathbb{Z} \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$

\rightarrow fermé \rightarrow o/f.

\rightarrow pro. cons.

pro. cons. dans $\pi^{-1}(U)$

\Rightarrow ~~Il~~ quitte à retracer \mathcal{U} on peut supposer

\uparrow Compacité de $|\pi^{-1}(v)|_{\text{cons}}$

que $\{|\tilde{f}| > 1\} \cap Z = \emptyset$ i.e. $|\tilde{f}| \leq 1$ sur $Z \cap \pi^{-1}(v)$

Il suffit maintenant d'étendre \tilde{f} par 0 sur $X \setminus \underbrace{\pi^{-1}(v)}_{\text{O/f.}}$ \square

Application balayante

6

Prop. X totalement discontinue. $Y \hookrightarrow X$ un sous v -faible. Alors Y est ind-représentable.

dem. Z aff. parf. muni de $Z \rightarrow Y \rightarrow X$

Soit $\bar{Z} = \overline{\text{Im}(Z \rightarrow X)}$ = pro.-cons. généralisant.
= sous-espace parfait de X .

Alors $Z \rightarrow \bar{Z}$ est un v -recouvrement et $Z \rightarrow X$ se factorise par $Y \hookrightarrow X \Rightarrow v$ -localement $\bar{Z} \hookrightarrow X$ se factorise
 Y sous v -faible via $Y \hookrightarrow X$
 $\Rightarrow \bar{Z} \hookrightarrow X$ se factorise via $Y \hookrightarrow X$
i.e. $\bar{Z} \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$.

$\Rightarrow Y = \varinjlim W$ □
} $W \subset |X|$ tq. $W \hookrightarrow Y$
} pro.-cons généralisant

Prop. X un diamant. $Y \subset X$ sous-v. fermé
 Alors Y est un diamant !!!

dem. $\tilde{X} \leftarrow \parallel$ espaces parfaits tot. discontinus
 \downarrow pro-étale surjectif
 X

$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Y & \hookrightarrow & X \end{array}$ $\tilde{Y} = \varinjlim_i W_i \hookrightarrow \tilde{X}$
 \parallel aff. perf. avec $W_i \hookrightarrow \tilde{X}$ pro-étale.

Alors $\varinjlim_i W_i \rightarrow \tilde{Y} \rightarrow Y$
 présentation pro-étale de Y !!! \square

Ex. * X espace perf. tout $Z \subset |X|$ est un diamant
 " * X diamant "

[* X espace rigide / \mathbb{Q}_p vu comme espace adique. Tout $Z \subset |X|$ est un diamant !!! \triangle : Z pas spécial si Z pas spécial.]

2^{ème} application

(7)

Def. $f: X \rightarrow Y$ dans Perf est quasi-pro-étale

si localement X $\forall C$ Corps parfait alg. clos
 \forall morphisme $\text{Spa}(C, C_c) \rightarrow Y$

$X \times_Y \text{Spa}(C, C_c) = \underline{A}_{\text{Spa}(C, C_c)}$ où A est un ensemble profini
i.e. $X \times_Y \text{Spa}(C, C_c) \rightarrow \text{Spa}(C, C_c)$ est pro-étale qc.

Th. $f: X \rightarrow Y$ qc séparé, quasi-pro-étale avec Y strictement
totalelement discontinu. Alors f est affinoïde pro-étale.

\Rightarrow Corollaire: $f: X \rightarrow Y$ est quasi-pro-étale \iff f est pro-étale
pro-étale localement
sur Y .

Ex. $f: X \rightarrow Y$ qc quasi-pro-étale surjectif \implies f épi pro-étale.

dem de théo.:

* Une construction: X perfectoïde qcqs $|X| \xrightarrow{\pi} \pi_0(X)$

nos morphisme de faisceaux pro-étale $X \xrightarrow{\pi} \pi_0(X)$

Alors si $A = \text{profini} + \text{morphisme } A \xrightarrow{\tau_0} \pi_0(X)$ on peut former $X \times_{\pi_0(X)} A$ qui est représentable par $X \times_{\pi_0(X)} A$ perfectoïde

vérifiant : * $X \times_{\pi_0(X)} A \rightarrow X$ est pro-étale

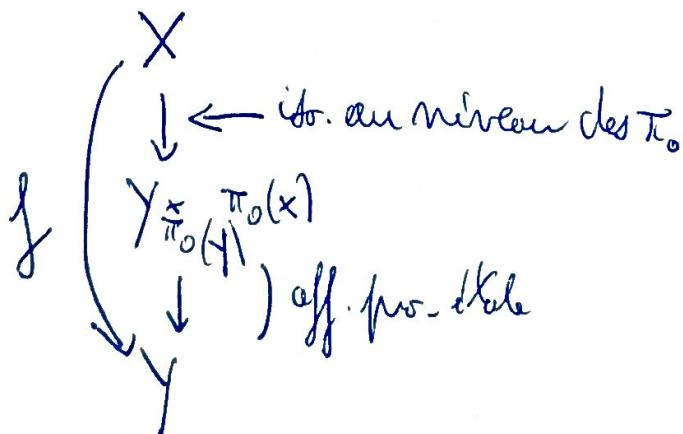
* Si X est aff. perf. $X \times_{\pi_0(X)} A \rightarrow X$ est aff. pro-étale

* $\pi_0(X \times_{\pi_0(X)} A) = A$ via la projection $X \times_{\pi_0(X)} A \rightarrow A$

\rightarrow facile.

* Y tot. disc. \Rightarrow aff. perf. \Rightarrow ~~$X \times_{\pi_0(X)} Y \rightarrow X$~~ $Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X) \rightarrow Y$ est affinoïde pro-étale

on vérifie que $Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X)$ est strict. tot. disc.



\Rightarrow qu'il a remplacer Y par $Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X)$ on peut supposer $\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$.

X
 $f \downarrow$ qc séparé
 $Y =$ strict tot. disc.

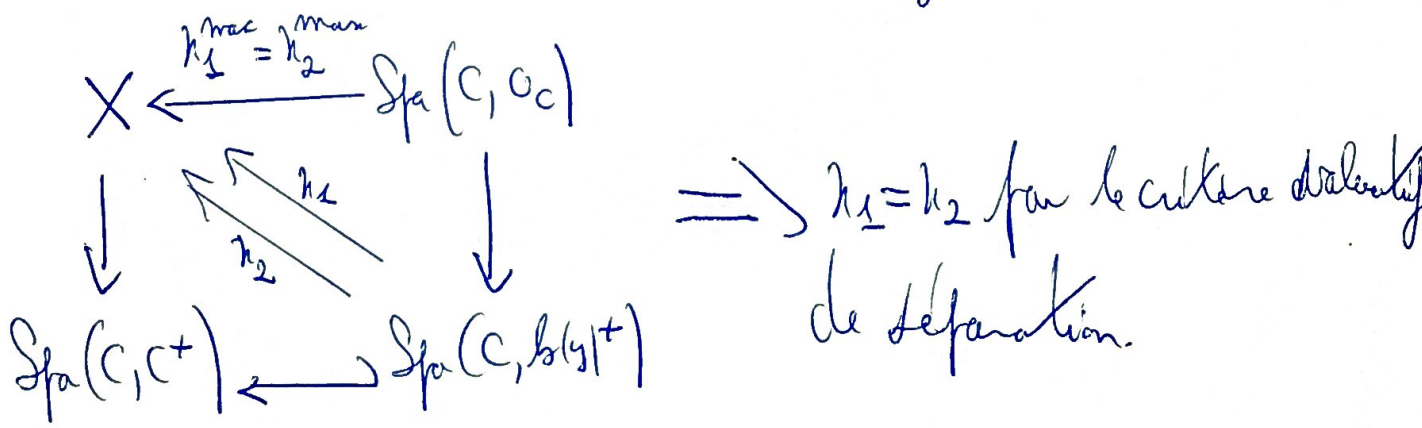
$\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$
 et $\forall y \in Y \quad X_{b(y), b(y)_0} = \text{profini.}$

Montrons que f est injectif: Quitte à remplacer Y par une de ses composantes connexes on peut supposer $Y = \text{Spa}(C, C^+)$ et X connexe.

Soient $x_1, x_2 \in X$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2) = y$ avec $x_1 \neq x_2$.

Soient \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 les généralisations maximales de x_1 et x_2 .

Si on avait $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ on aurait un diagramme



On a donc $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$. On peut donc supposer \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 maximaux $\in X_{C, C_0}$ profini.

$\implies X_{C, C_0} = \underline{A}$ avec A profini non réduit à un seul élément.

Ecrivons $A = U_1 \sqcup U_2$ ouverts/fermés.

$$\text{Alors } \begin{array}{c} \bar{U}_1 \subset X_{c, G_c} \subset X \\ \cup_2 \subset \cup_1 \end{array} \begin{array}{c} \text{off} \\ \text{off} \end{array} \quad \uparrow \text{pro-constructible}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} U_1, U_2 \subset X \\ \text{pro-cons} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \bar{U}_1 = \{ \text{spécialisations de } U_1 \} \\ \bar{U}_2 = \text{''} \quad \quad \quad U_2 \text{''} \end{array}$$

$\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$ par l'argument de séparation précédent et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
 \Rightarrow contredit la connexité de X .

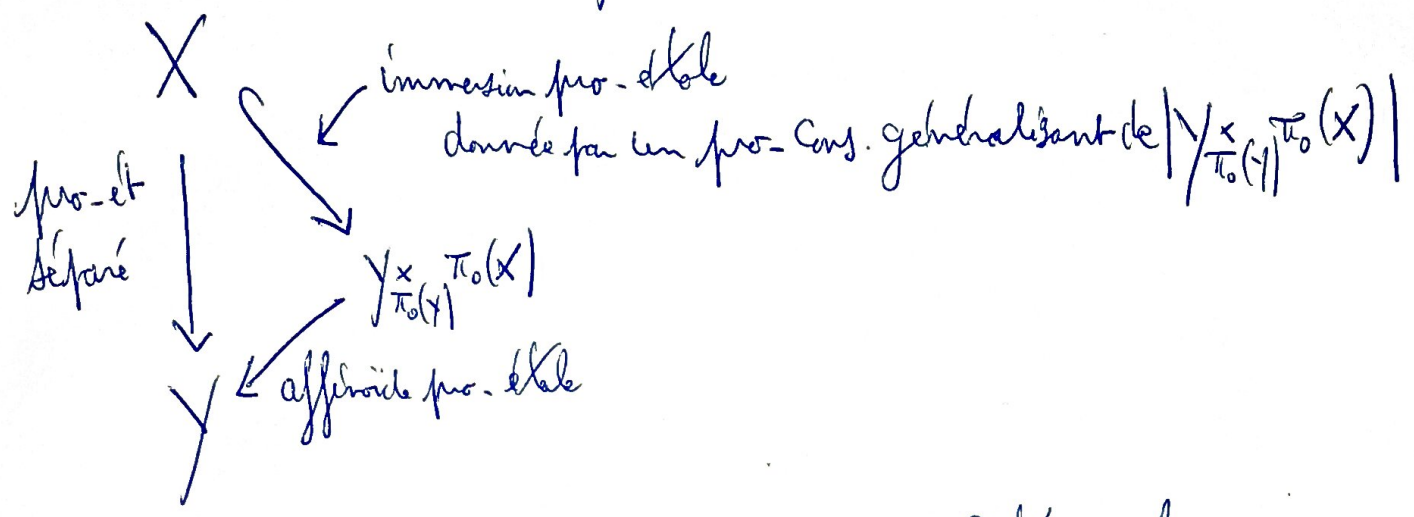
On a donc montré que f est injectif. Il est de plus clair que
 $\forall x \in X \quad K(x) = K(x^{\text{max}}) = K(f(x))$.

$\Rightarrow f: X \hookrightarrow Y$ immersion. $f \text{ qc} \Rightarrow |X| \subset |Y|$ pro-cons. gén.

$\Rightarrow f$ affinoïde pro-étale □

\uparrow Résultat précédent

Rem. La preuve fournit une factorisation
canonique pour γ strict. tot. discontinue



\Rightarrow La catégorie des pro-ét. sépare./ $\gamma \simeq$ Catégorie formée des ensembles
 profinis A + application τ^0
 $A \rightarrow \pi_0(\gamma) +$ sous-ensemble
 pro-cons. généralisant de
 $Y^x_{\pi_0(\gamma)} \cdot A$